



University of the Pacific  
**Scholarly Commons**

---

Euler Archive - All Works

Euler Archive

---

1750

# Variae demonstrationes geometriae

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>



Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

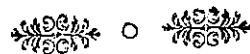
2018-09-25

---

## Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Variae demonstrationes geometriae" (1750). *Euler Archive - All Works*. 135.  
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/135>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).



# VARIAE DEMONSTRATIONES GEOMETRIAE.

AVCTORE  
L. EVLERO.

§. 1.

**R**eperitur in commercio epistolico Fermatii propositio Tab. II.  
quaedam geometrica, quam Geometris demonstran-  
dam proposuit. Quae etsi ad naturam circuli spectat,  
nihilque difficultatis primo intuitu inuoluere videtur, ta-  
men a pluribus Geometris frustra est suscepta, neque vs-  
quam adhuc eius demonstratio est tradita. Per Analysin  
quidem non difficulter eius veritas agnoscitur, indeque de-  
monstrationem deriuare non admodum foret arduum, sed  
huiusmodi demonstrationes plerumque ita analysin olent,  
vt ab huius artis expertibus vix intelligi queant. Requi-  
ritur igitur huius propositionis a Fermatio allatae eius-  
modi demonstratio geometrica, quae more veterum Ge-  
ometrarum sit adornata, et quae etiam ab iis, qui ana-  
lysi non sint affueti, intelligi possit. Talem igitur de-  
monstrationem hic tradam, quae sequenti lemmate inni-  
titur.

## Lemmata.

§. 2. Si linea recta AB vtcunque secetur in duo-  
bus punctis R et S, erit rectangulum ex tota AB in par-  
tem mediam RS vna cum rectangulo ex partibus ex-  
tremis AR et BS aequale rectangulo ex partibus AS  
et BR, seu erit:  $AB \cdot RS + AR \cdot BS = AS \cdot BR$ . Fig. 1.

Tom. I.

G

De-

## Demonstratio.

Cum fit  $AB = AS + BS$ , erit vtrumque ducendo in  $RS$ ,

$$AB \cdot RS = AS \cdot RS + BS \cdot RS$$

addatur  $AR \cdot BS$  *utrinque*, et erit

$$AB \cdot RS + AR \cdot BS = AS \cdot RS + BS \cdot RS + AR \cdot BS$$

At est  $BS \cdot RS + AR \cdot BS = BS(RS + AR) = BS \cdot AS$ ,

vnde fit  $AB \cdot RS + AR \cdot BS = AS \cdot RS + BS \cdot AS$

Verum est  $AS \cdot RS + BS \cdot AS = AS(RS + BS) = AS \cdot BR$

Consequenter habebitur:  $AB \cdot RS + AR \cdot BS = AS \cdot BR$

Q. E. D.

## Scholion.

Fig. 2.

§. 3. Hocce lemma etiam sequenti modo per solam figuram geometricam demonstrari potest. Super data recta  $AB$  in punctis  $R$  et  $S$  vtcunque diuisa constituitur quadratum,  $ABab$  et latus  $Ba$  simili modo secetur in punctis  $r$  et  $s$ , vt fit  $Bs = BS$ ;  $sr = SR$  et  $ar = AR$ : tum ductis rectis  $Rb$ ,  $Sg$  item  $sc$ ,  $rd$  lateribus quadrati parallelis, erunt partes  $Ss$ ,  $cg$  quadrata circa diagonalem  $Bb$  sita, ideoque erit  $\square Ae = \square ae$ . Addatur vtrique rectangulum  $cf$ , fietque  $\square Ae + \square cf = \square ae + \square cf$  seu  $\square Af = \square ae + \square cf$ , sed  $\square ae = \square af + \square er$ , vnde  $\square Af = \square af + \square er + \square cf = \square af + \square er$ . At est  $\square Af = AS \cdot Br = AS \cdot BR$ ; et  $\square af = ar \cdot BS = AR \cdot BS$  atque  $\square cr = AB \cdot rs = AB \cdot RS$ , quibus valoribus substitutis elicietur:  $AS \cdot BR = AR \cdot BS + AB \cdot RS$  seu  $AB \cdot RS + AR \cdot BS = AS \cdot BR$  prorsus vti lemma habet.

Theorema

# Theorema Fermatii.

§. 4. Si super semicirculi  $AMB$  diametro  $AB$  <sup>Fig. 3.</sup> constituatur parallelogrammum rectangulum  $ABFE$ , cuius latitudo  $AE$  seu  $BF$  aequetur chordae quadrantis eiusdem circuli seu lateri quadrati inscripti, atque ex punctis  $E$  et  $F$  ad quodvis peripheriae punctum  $M$  ducantur rectae  $EM$ ,  $FM$ ; his diameter  $AB$  ita secabitur in punctis  $R$  et  $S$ , ut sit:  $AS^2 + BR^2 = AB^2$ .

## Demonstratio.

Ex puncto  $M$  per terminos diametri  $A$  et  $B$  producantur rectae  $MAP$  et  $MBQ$  donec basi  $EF$  productae occurrant in punctis  $P$  et  $Q$ . Iam quia angulus  $AMB$  est rectus, erit  $P + Q = \text{ang. recto}$ ; at est etiam  $P + \alpha = \text{ang. recto}$  et  $Q + \epsilon = \text{ang. recto}$ , ob rectas  $AE$  et  $BF$  ad  $EF$  normales; unde erit  $P = \epsilon$  et  $Q = \alpha$ , ideoque triangu-  
la  $PEA$  et  $BFQ$  inter se similia: ex quo habebitur  $PE : AE = BF : QF$  hincque  $PE \cdot QF = AE \cdot BF = AE^2$ , et propterea  $2PE \cdot QF = 2AE^2$ . At quia  $AE$  aequatur chordae quadrantis, erit  $2AE^2 = AB^2 = EF^2$ , ita ut futurum sit  $2PE \cdot QF = EF^2$ . Quare cum hic recta  $PQ$  ita in punctis  $E$  et  $F$  secta habeatur, ut sit duplum rectangulum partium extremarum  $PE$  et  $QF$  aequale partis mediae  $EF$  quadrato; diameter vero  $AB$  in punctis  $R$  et  $S$  simili modo sit secta, sequitur fore quoque duplum rectangulum partium extremarum  $AR$  et  $BS$  aequale quadrato partis mediae  $RS$ , seu erit  $2AR \cdot BS = RS^2$ . Iam cum sit  $AS + BR = AB + RS$ , erit quadratis sumtis:

G 2

AS

$$AS^2 + BR^2 + 2AS.BR = AB^2 + RS^2 + 2AB.RS$$

Ponatur hic pro  $RS^2$  eius valor  $2AR.BS$  fietque

$$AS^2 + BR^2 + 2AS.BR = AB^2 + 2AB.RS + 2AR.BS$$

At per lemma praemissum est  $AB.RS + AR.BS = AS.BR$  ideoque etiam  $2AB.RS + 2AR.BS = 2AS.BR$

BR, quo valore in illa aequalitate substituto orietur:

$$AS^2 + BR^2 + 2AS.BR = AB^2 + 2AS.BR$$

auferatur vtrunque pars communis  $2AS.BR$  ac remanebit:

$$AS^2 + BR^2 = AB^2. \text{ Q. E. D.}$$

§. 5. In vulgus deinde nota est regula inueniendi aream trianguli ex datis eius tribus lateribus, quae ita se habet, vt a semisumma laterum singula latera seorsim subtrahantur et solidum seu productum ex his tribus residuis ortum per ipsam semisummam multiplicetur, tum vero ex isto producto radix quadrata extrahatur, quae exhibitura sit aream trianguli propositi. Analytice quidem haec regula facile demonstratur, ac demonstrationes ex analyfi concinnatae passim occurrunt, verum eae a more geometrico non mediocriter dissident, vt non nisi a lectoribus in Analyfi exercitatis intelligi possint. Quocirca istius regulae hic demonstrationem pure geometricam tradam, in qua nullum analyseos vestigium percipiatur. Petita est ea ex circulo triangulo inscripto, cuius symptomata ab Euclide sufficienter sunt exposita; quibus autem ad demonstrationem formandam opus habeo, ea in sequentibus propositionibus complectar, quae viam ad memoratae regulae demonstrationem parabunt.

Theorema

### Theorema.

§. 6. Area cuiusque Trianguli ABC aequatur re-  
ctangulo ex semifumma laterum in radium circuli inscri-  
pti, seu area  $\triangle ABC$  est  $\frac{1}{2}(AB+AC+BC)OP$ . Fig. 4.

### Demonstratio.

Ex centro circuli inscripti O in singula latera de-  
mittantur perpendiculara OPOQ. OR, quae erunt aequa-  
lia radio circuli inscripti. Ex O ducantur pariter ad an-  
gulos rectae OA.OB.OC quibus triangulum propositum  
diuidetur in tria triangula AOB, AOC, BOC, eandem  
altitudinem  $OR=OQ=OP$  habentia, et quorum bases  
sunt latera trianguli AB, AC, BC. Hinc ista triangula  
iunctim sumta aequantur triangulo cuius basis est summa  
laterum  $AB+AC+BC$ , et altitudo radio circuli inscri-  
pti OP aequalis, cui cum proinde area ipsius trianguli  
propositi ABC fit aequalis, haec aequabitur rectangulo ex  
semisumma laterum in radium circuli inscripti OP, seu  
erit area  $\triangle ABC = \frac{1}{2}(AB+AC+BC)OP$ . Q. E. D.

### Theorema.

§. 7. Si ex centro O circuli triangulo ABC inscripti  
in singula latera perpendiculara demittantur OP, OQ, OR  
his latera ita secabuntur, vt posita semifumma laterum  
 $\frac{1}{2}(AB+AC+BC)=S$ , futurum sit:  
 $AR=AQ=S-BC$ ;  $BR=BP=S-AC$  et  $CP=CQ=S-AB$ .  
atque  $AR+BP+CQ=S$ .

### Demonstratio.

Nam ob perpendiculara OP, OQ, OR inter se aequalia,  
statim patet fore  $AQ=AR$ ;  $BP=BR$  et  $CP=CQ$ , vnde  
erit

erit summa laterum  $AB + AC + BC = 2AR + 2BP + 2CQ$ , ideoque habebitur  $AR + BP + CQ = \text{semisummae laterum} = S$ . Erit ergo

$$AR + BC = S \text{ ideoque } AR = AQ = S - BC$$

$$BP + AC = S \text{ ideoque } BP = BR = S - AC$$

$$CQ + AB = S \text{ ideoque } CQ = CP = S - AB.$$

Q. E. D.

### Theorema.

Fig. 5.

§. 8. Si ut ante ex centro  $O$  circuli triangulo  $ABC$  inscripti in singula latera demittantur perpendiculara  $OP, OQ, OR$ , erit solidum sub partibus  $AR, BP, CQ$  contentum aequale solido ex semisumma laterum  $S$  et quadrato radii circuli inscripti  $OP$  confecto seu erit:  $AR \cdot BP \cdot CQ = S \cdot OP^2$ .

### Demonstratio.

Ductis ex centro circuli inscripti  $O$  ad singulos angulos rectis  $OA, OB, OC$ , ad earum aliquam  $CO$  si opus est productam ex altero reliquorum angulorum  $B$  ducatur normalis  $BM$ , quae radio  $PO$  producto occurrat in  $N$ . Iam cum anguli  $A, B, C$  a rectis  $OA, OB, OC$  bifariam secentur, erit in triangulo  $BOC$  angulus extremus  $BOM = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$ , hinc ob  $BOM + OBM = \text{recto}$ , erit  $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + OBM = \text{recto}$ . Verum quia  $A + B + C = 2 \text{ rect.}$  erit quoque  $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A = \text{recto}$ , ideoque  $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + OBM = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A$  unde fit  $OBM = \frac{1}{2}A = OAR$ . Quare cum in triangulis rectangulis  $BOM$  et  $AOR$  sit ang.  $OBM = \text{ang. } OAR$

ea

ea erunt inter se similia, hincque fiet

$$AR : RO = BM : MO, \text{ seu } AR : OP = BM : MO$$

Porro ob triangula rectangula CBM, NBP et NOM inter se similia erit :

$BM : BC = MO : ON$  seu  $BM : MO = BC : ON$   
vnde colligitur :  $AR : OP = BC : ON$ , et aequatis re-  
ctangulis mediorum et extremorum erit :

$AR \cdot ON = OP \cdot BC$ ; atque ob  $ON = PN - OP$   
 $AR \cdot PN - AR \cdot OP = BC \cdot OP$  seu  $AR \cdot PN = AR \cdot OP$   
 $+ BC \cdot OP = (AR + BC) OP$ . Verum  $AR + BC$   
 $= S$  (§. praec.), ita vt fit  $AR \cdot PN = S \cdot OP$ . Deni-  
que ob triangula COP et NBP similia est  $PN : BP = C$   
 $P : OP$ , vnde  $OP \cdot PN = BP \cdot CP$ , et  $AR \cdot BP \cdot CP = A$   
 $R \cdot OP \cdot PN$ , sed prior aequatio per  $OP$  multiplicata dat  
 $AR \cdot OP \cdot PN = S \cdot OP^2$ . Quocirca concluditur  $AR \cdot BP \cdot$   
 $CP$  seu  $AR \cdot BP \cdot CQ = S \cdot OP^2$ . Q. E. D.

### Theorema.

§. 9. Area trianguli cuiusvis ABC reperitur, si a semi-  
summa laterum (quae fit  $= S$ ) singula latera seorsim sub-  
trahantur, ac solidum sub his tribus residuis contentum  
per ipsam semisummam laterum  $S$  multiplicetur, atque ex  
producto radix quadrata extrahatur. Seu erit area tri-  
anguli  $ABC = \sqrt{S(S-AB)(S-AC)(S-BC)}$ .

### Demonstratio.

Per §. 6. area trianguli ABC aequatur rectangulo  
ex semisumma laterum  $S$  et radio circuli inscripti  $OP$ ,  
sicque erit area trianguli  $ABC = S \cdot OP$ . Verum cum  
ex §. praec. fit  $S \cdot OP^2 = AR \cdot BP \cdot CQ$ , erit per  $S$  vtrin-  
que



que multiplicando  $S^2 \cdot OP^2 = S \cdot AR \cdot BP \cdot CQ$ , hincque radicem quadratam extrahendo habebitur:

$$S \cdot OP = \sqrt{S \cdot AR \cdot BP \cdot CQ}$$

ideoque area trianguli  $ABC = \sqrt{S \cdot AR \cdot BP \cdot CQ}$ .

sed ex §. 7 patet esse:

$AR = S - BC$ ;  $BP = S - AC$  et  $CQ = S - AB$   
quibus valoribus substitutis erit.

$$\text{Area } \triangle ABC = \sqrt{S(S-AB)(S-AC)(S-BC)}.$$

Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 10. Hinc etiam concinna expressio pro radio circuli triangulo inscripti  $OP$  exhiberi potest. Cum enim fit  $S \cdot OP^2 = AR \cdot BP \cdot CQ$  erit  $OP^2 = \frac{AR \cdot BP \cdot CQ}{S}$ , ideoque  $OP = \sqrt{\frac{AR \cdot BP \cdot CQ}{S}}$ . Iam ergo pro  $AR, BP, CQ$  scriptis valoribus ante indicatis habebitur.

$$\text{Radius circuli inscripti } OP = \sqrt{\frac{(S-AB)(S-AC)(S-BC)}{S}}.$$

Coroll. 2.

§. 11. Quia  $S$  denotat semifummam laterum trianguli, ita ut fit  $S = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$  erit hoc valore substituto:

$$S - AB = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(AC + BC - AB)$$

$$S - AC = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(AB + BC - AC)$$

$$S - BC = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC - \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$$

fic erit:  $S(S-AB)(S-AC)(S-BC) =$

$$\frac{1}{16}(AB + AC + BC)(AC + BC - AB)(AB + BC - AC)(AB + AC - BC)$$

ideoque area trianguli quoque ita exprimetur.

$$\frac{1}{4}\sqrt{(AB + AC + BC)(AC + BC - AB)(AB + BC - AC)(AB + AC - BC)}.$$

Scho-

### Scholion.

§. 12. Ultima haec formula pro invenienda area cuiusque trianguli est maxime nota, ac plerumque in elementis geometriae tradi solet, etiamsi eius demonstratio difficulter per elementa confici possit. Similis quoque fere regula habetur pro area cuiusque quadrilateri circulo inscripti invenienda, quippe quae pari modo satis concinne per sola latera exprimi potest. Eius quidem demonstratio, si analysis in subsidium vocetur, non est difficilis, sed qui eam more apud Geometras recepto adornare sunt conati, maximas experti sunt difficultates, Cl: quondam Naudaeus non parum in hoc genere laboravit, et geminam huius quoque regulae demonstrationem protulit in Misc. Berol. verum utraque non solum maxime est intricata et multitudine linearum in figura ductarum obruta, ut sine summa attentione ne capi quidem possit, sed etiam ubique nimis luculenta vestigia analytici calculi offendunt, Mihi quidem sequentibus propositionibus praemittendis opus est.

### Theorema.

§. 13. Si quadrilateri circulo inscripti ABCD <sup>Fig. 6.</sup> duo latera sibi opposita AB, DC ad occursum vsque in E producantur, erit area quadrilateri ABCD ad aream trianguli BCE ut  $AD^2 - BC^2$  ad  $BC^2$ .

### Demonstratio.

Quia tam angulus BAD quam BCE cum angulo BCD constituit duos rectos, erit  $BAD = BCE$ , similiterque  $ADC = CBE$ , unde triangula AED et CEB

Tom. I.

H

erunt

58 *VARIAE DEMONSTRAT. GEOMETR.*

erunt similia, eorumque ergo areae se habebunt vt quadrata laterum homologorum, veluti AD et BC: erit itaque  $\triangle AED : \triangle CEB = AD^2 : BC^2$  et diuidendo  $\triangle AED - \triangle CEB : \triangle CEB = AD^2 - BC^2$  hoc est  $\square ABCD : \triangle CEB = AD^2 - BC^2 : BC^2$ . Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 14. Ex cognita ergo area trianguli CEB inuenietur area quadrilateri ABCD: erit namque

$$\square ABCD = \frac{AD^2 - BC^2}{BC^2} \cdot \triangle BEC$$

seu si area trianguli BEC designetur breuitatis gratia littera T, et area quadrilateri ABCD littera Q, erit  $Q = \frac{AD^2 - BC^2}{BC^2} \cdot T$ .

Coroll. 2.

§. 15. Tum vero quia est differentia quadratorum  $AD^2 - BC^2 = (AD + BC)(AD - BC)$ , erit  $\frac{AD^2 - BC^2}{BC^2} = \frac{AD - BC}{BC} \cdot \frac{AD + BC}{BC}$  hincque habebitur haec aequatio

$$Q = \frac{AD - BC}{BC} \cdot \frac{AD + BC}{BC}, \text{ quae sumendis quadratis abit in hanc:}$$

$$QQ = \frac{AD - BC}{BC} \cdot \frac{AD - BC}{BC} \cdot \frac{AD + BC}{BC} \cdot \frac{AD + BC}{BC} \cdot T \cdot T$$

Coroll. 3.

§. 16. Ex superiori autem §. 11. colligitur esse aream trianguli BEC  $= T = \frac{1}{4} \sqrt{(BE + CE + BC)(BE + CE - BC)(BE - CE + BC)(CE - BE + BC)}$  vnde  $TT = \frac{1}{16} (BE + CE + BC)(BE + CE - BC)(BE - CE + BC)(CE - BE + BC)$ . Hinc ergo prodibit valor quadrati areae quadrilateri ABCD seu ipsius QQ combinandis his factoribus ipsius TT cum ante inuentis ita expressus

QQ

$$QQ = \frac{1}{16} \cdot \frac{(AD-BC)(BE+CE+BC)}{BC} \cdot \frac{(AD-BC)(BE+CE-BC)}{BC} \cdot \frac{(AD+BC)(BC+BE-CE)}{BC} \cdot \frac{(AD+BC)(BC-BE+CE)}{BC}$$

Coroll. 4.

§. 17. Quam formam ita enunciare licet, ut dicamus quadratum areae ABCD decies sexies sumtum seu 16 QQ aequari producto ex his quatuor factoribus.

$$\begin{aligned} \text{I.} & \dots \frac{(AD-BC)(BE+CE+BC)}{BC} \\ \text{II.} & \dots \frac{(AD-BC)(BE+CE-BC)}{BC} \\ \text{III.} & \dots \frac{(AD+BC)(BC+BE-CE)}{BC} \\ \text{IV.} & \dots \frac{(AD+BC)(BC-BE+CE)}{BC} \end{aligned}$$

Theorema.

§. 18. Iisdem positis, quae in theor. praec. sunt assumpta erit  $BE+CE:BC=AB+CD:AD-BC$ .

Demonstratio.

Cum enim triangula BEC et DEA sint. similia, erit  $BE:DE=BC:AD$  itemque  $CE:AE=BC:AD$ ; unde ex vtraque prodibit diuidendo

$$BE:DE-BE=BC:AD-BC$$

$$CE:AE-CE=BC:AD-BC$$

Cum igitur tam BE ad DE-BE, quam CE ad AE-CE eandem teneat rationem, ut nempe BC ad AD-BC; etiam summa antecedentium BE+CE ad summam consequentium DE-BE vna cum AE-CE eandem seruabit rationem eritque:

$$BE+CE:DE-BE+AE-CE=BC:AD-BC$$

$$\text{At est } DE-BE+AE-CE=DE-CE+AE-BE$$

H 2

=CD

60 *VARIAE DEMONSTRAT. GEOMETR.*

$=CE+AB$  sicque erit  $BE+CE:AB+CD=BC:AD-BC$  et alternando  $BE+CE:BC=AB+CD:AD-BC$ . Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 19. Cum igitur sit  $BE+CE:BC=AB+CD:AD-BC$  erit componendo  $BE+CE+BC:BC=AB+CD+AD-BC:AD-BC$  vnde rectangulum extremorum aequale erit rectangulo mediorum, scilicet:  $(AD-BC)(BE+CE+BC)=BC(AB+CD+AD-BC)$  hincque factorum in §. 17 exhibitorum primus erit I.  $\frac{(AD-BC)(BE+CE+BC)}{BC}=AB+CD+AD-BC$

Coroll. 2.

§. 20. Simili modo ex proportionem  $BE+CE:BC=AB+CD:AD-BC$  oriatur diuidendo:  $BE+CE-BC:BC=AB+CD-AD+BC:AD-BC$  vnde sequentia rectangula inter se erunt aequalia:  $(AD-BC)(BE+CE-BC)=BC(AB+CD-AD+BC)$  hincque factorum in §. 17 exhibitorum secundus erit: II.  $\frac{(AD-BC)(BE+CE-BC)}{BC}=AB+CD-AD+BC$ .

Theorema.

§. 21. Iisdem positis, scilicet si quadrilateri circulo inscripti ABCD duo latera AB, DC ad concursum vsque in E producantur, erit:

$$CE-BE:AB-DC=BC:AD+BC$$

Demonstratio.

Triangula similia BCE et DEA praebent vt ante

te has proportiones :  $BE:DE=BC:AD$  et  $CE:AE=BC:AD$  ex quarum vtraque elicitur componendo

$$BE:DE+BE=BC:AD+BC$$

$$CE:AE+CE=BC:AD+BC$$

Cum ergo tam  $BE$  ad  $DE+BE$  quam  $CE$  ad  $AE+CE$  eandem teneat rationem, etiam differentia antecedentium  $CE-BE$  ad differentiam consequentium  $AE+CE$  demto  $DE+BE$  eandem habebit rationem vt  $BC$  ad  $AD+BC$  erit scilicet :

$$CE-BE:AE+CE-DE-BE=BC:AD+BC$$

At est  $AE+CE-DE-BE=AE-BE-DE+C$   
 $E=AB-CD$  ficque erit  $CE-BE-AB-CD=BC$  :  
 $AD+BC$  et alternando  $CE-BE:BC=AB-CD$  :  
 $AD+BC$ . Q. E. D.

### Coroll. 1.

§. 22. Cum igitur hinc fit inuertendo  $BC:CE-BE=AD+BC:AB-CD$ , erit componendo  $BC+CE-BE:BC=AD+BC+AB-CD:AD+BC$ . Atque aequatis rectangulis extremorum et mediorum fiet  $(AD+BC)(BC+CE-BE)=BC(AD+BC+AB-CD)$  vnde factorum §. 17. exhibitorum quartus erit : IV. ...  $\frac{(AD+BC)(BC+CE-BE)}{BC}=AB+AD+BC-CD$ .

### Coroll. 2.

§. 23. Simili modo ex proportione  $BC:CE-BE=AD+BC:AB-CD$  orietur diuidendo  
 $BC-CE+BE:BC=AD+BC-AB+CD:AD+BC$  hincque erit  $(AD+BC)(BC+BE-CE)=BC$

H 3

(AB

$(AD + BC + CD - AB)$  vnde factorum §. 17 exhibitorum tertius erit : III. . .  $\frac{(AD + BC)(BC + BE - CE)}{BC} = AD + BC + CD - AB.$

### Theorema.

§. 24. Quadrilateri circulo inscripti ABCD area inuenitur, si a semisumma omnium eius laterum singula latera seorsim subtrahantur, haec quatuor residua in se invicem multiplicentur, atque ex producto radix quadrata extrahatur.

### Demonstratio.

Si duo latera opposita AB, CD ad concursum vsque in E producantur, atque quadrilateri ABCD area ponatur = Q, vidimus §. 17 valorem 16 QQ aequari producto ex quatuor factoribus, quos eosdem factores in §. §. 19. 20 et §. §. 22. 23 succinctius expressimus, ita ut nunc valor ipsius 16 QQ aequetur producto ex his quatuor factoribus.

$$I. \frac{(AD - BC)(BE + CE + BC)}{BC} = AB + CD + AD - BC$$

$$II. \frac{(AD + BC)(BE + CE - BC)}{BC} = AB + CD - AD + BC$$

$$III. \frac{(AD + BC)(BC + BE - CE)}{BC} = AD + BC + CD - AB$$

$$IV. \frac{(AD + BC)(BC - BE + CE)}{BC} = AB + AD + BC - CD$$

Hinc ergo erit 16 QQ aequale huic producto  $(AB + CD + AD - BC)(AB + CD + BC - AD)(AD + BC + CD - AB)(AB + AD + BC - CD)$ . Quod si iam ponatur summa omnium laterum  $AB + BC + CD + DA = 2S$  ut semisumma sit = S. erit:

2 S

$$2S - 2AB = BC + CD + DA - AB = \text{factori III.}$$

$$2S - 2BC = AB + CD + DA - BC = \text{factori I.}$$

$$2S - 2CD = AB + BC + DA - CD = \text{factori IV.}$$

$$2S - 2DA = AB + BC + CD - DA = \text{factori II.}$$

vnde productum ex his quatuor factoribus erit  $(2S - 2AB)(2S - 2BC)(2S - 2CD)(2S - 2DA)$ , quod binariis seorsim sumtis abit in hanc expressionem:  $16(S - AB)(S - BC)(S - CD)(S - DA)$  cui propterea valor ipsius  $16QQ$  aequatur. Quare vtrunque per  $16$  diuiso erit  $QQ = (S - AB)(S - BC)(S - CD)(S - DA)$  vnde si radix quadrata extrahatur, fiet:  $Q = \text{Areae } ABCD = \sqrt{(S - AB)(S - BC)(S - CD)(S - DA)}$ . Patet ergo aream quadrilateri  $ABCD$  inueniri, si a semifumma laterum  $S$  seorsim subtrahantur singula latera  $AB, BC, CD, DA$ , haecque quatuor residua  $S - AB, S - BC, S - CD, S - DA$  in se inuicem multiplicentur, atque ex producto radix quadrata extrahatur. Q. E. D.

### Scholion.

§. 25. His Theorematibus de area trianguli et quadrilateri circulo inscripti demonstratis, quae quidem ipsa satis sunt nota, aliud theorema subiungam nusquam adhuc neque prolutum neque demonstratum. Complectitur id singularem proprietatem omnium quadrilaterorum notatu maxime dignam, quae cum cognita parallelogrammorum natura eximiam habet affinitatem. Quemadmodum enim constat in omni parallelogrammo summam quadratorum ambarum diagonalium aequalem esse summae quadratorum quatuor laterum, ita demonstrabo in omni quadrilatero non parallelogrammo summam quadratorum ambarum



barum diagonalium semper minorem esse summa quadratorum quatuor laterum, atque adeo defectum facillime posse assignari.

### Theorema.

Fig. 7. §. 26. Proposito quocunque trapezio ABCD cum suis diagonalibus AC, BD; si circa bina latera AB, BC compleatur parallelogrammum ABCE, quod cum trapezio tria puncta A, B, C habebit communia, iunganturque reliqua puncta diuersa D et E recta DE, erit summa quadratorum laterum trapezii  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$  maior quam summa quadratorum diagonalium  $AC^2 + BD^2$ , atque excessus aequabitur quadrato lineae DE: seu erit  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + DE^2$ .

### Demonstratio.

Ducatur in parallelogrammo ABCE altera diagonalis BE quae ipsi cum trapezio non est communis; tum ponatur CF ipsi AD, et BF ipsi ED parallela et aequalis, et quia  $BC = AE$ , istae lineae concurrent in puncto F, vt triangulum CBF simile sit et aequale triangulo AED. Quo facto iungantur lineae AF, DF et EF. Hinc manifestum est fore tam ADCF quam BDEF parallelogrammum, atque diagonales illius esse AC et DF, huius uero BE et DF: vnde per proprietatem parallelogrammorum notam erit

$$\text{ex ADCF} \dots 2AD^2 + 2CD^2 = AC^2 + DF^2$$

$$\text{ex BDEF} \dots 2BD^2 + 2DE^2 = BE^2 + DF^2$$

vnde ex vtraque aequatione valorem  $DF^2$  definiendo habeb-

bebitur:  $2AD^2 + 2CD^2 - AC^2 = 2BD^2 + 2DE^2 - BE^2$   
 $= DF^2$  et  $AC^2$  vtrunque addendo fiet:  $2AD^2 + 2CD^2 = 2BD^2 + 2DE^2 + AC^2 - BE^2$ . Iam vero ex natura parallelogrammi ABCE erit  $2AB^2 + 2BC^2 = AC^2 + BE^2$  quae aequatio ad illam adiecta dabit  $2AD^2 + 2CD^2 + 2AB^2 + 2BC^2 = 2BD^2 + 2DE^2 + 2AC^2$  ac  $p2$  diuidendo obtinebitur  $AD^2 + CD^2 + AB^2 + BC^2 = BD^2 + DE^2 + AC^2$  seu  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + DE^2$ . At AB, BC, CD, DA sunt quatuor latera trapezii propositi ABCD, et AC, BD eius diagonales vnde summa quadratorum laterum aequalis est summae quadratorum amborum diagonalium et insuper quadrato lineae DE, quod discrimen trapezii a parallelogrammo exponitur. Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 27. Quo magis ergo trapezium a parallelogrammo discrepat, seu quo maius euadit interuallum DE, eo magis summa quadratorum laterum trapezii superabit summam quadratorum diagonalium.

Coroll. 2.

§. 28. Quia igitur in omni parallelogrammo summa quadratorum laterum aequalis est summae quadratorum diagonalium, in omni vero quadrilatero non parallelogrammo maior est, sequitur nullum exhiberi posse quadrilaterum, in quo summa quadratorum laterum minor sit quam summa quadratorum diagonalium.

Coroll. 3.

§. 29. Si vtraque diagonalis AC et BD trapezii  
 Tom. I. I pro-

propositi ABCD bifecetur, illa in P haec vero in Q; erit recta PQ semissis interualli DE, et  $DE^2$  aequalis erit quadruplo quadrato lineae PQ, vnde excessus summae quadratorum laterum super summam quadratorum diagonalium valebit quadratum lineae PQ quater sumtum.

## Coroll. 4.

Fig. 8.

§. 30. Theorema ergo propositum sine mentione vllius parallelogrammi ita enunciari poterit: *In omni quadrilatero ABCD, si eius diagonales AC et BD bifecentur in punctis P et Q, eaque iungantur recta PQ, erit summa quadratorum laterum  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$  aequalis summae quadratorum diagonalium  $AC^2 + BD^2$  vna cum quadruplo quadrati lineae PQ: seu erit  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2$ .*

